

Теорема Чевы в направленных

12 июля

I. На прямых AB , BC и AC выбраны (возможно, бесконечно удалённые) точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно.

Теорема Чевы. Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (*)$$

Теорема Менелая. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1. \quad (\dagger)$$

1. (а) Как изменится простое отношение (AB, C_1) при проективном преобразовании, отправляющем середину AB на бесконечность?

(б) Сведите случай, когда некоторые из сомножителей в формуле $(*)$ отрицательны, к классической теореме Чевы.

(в) Как вывести теорему Менелая (\dagger) из теоремы Чевы $(*)$?

II. Докажите следующие утверждения при помощи теоремы Чевы или Менелая:

(а) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;

(б) В трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

III. Зафиксируем обозначения для следующих направленных углов:

$$\angle CAA_1 = \alpha_1, \quad \angle A_1AB = \alpha_2,$$

$$\angle ABB_1 = \beta_1, \quad \angle B_1BC = \beta_2,$$

$$\angle BCC_1 = \gamma_1, \quad \angle C_1CA = \gamma_2.$$

Тригонометрическая теорема Чевы

Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1. \quad (**)$$

2. (а) Убедитесь, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{AC}{BC}$ и сведите формулу $(**)$ к формуле $(*)$.

(б) **Изогональное сопряжение.** Докажите, что если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые, симметричные им относительно биссектрис углов

A , B и C соответственно, тоже пересекаются в одной точке.

(в) Точку P отразили относительно сторон треугольника ABC . Докажите, что центр окружности, проходящей через получившиеся три точки, изогонально сопряжён точке P .

3. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC .

(а) **Прямая Симсона.** Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника, лежат на одной прямой.

(б) Докажите, что точкой, изогонально сопряжённой P , является бесконечно удалённая точка, задающая направление, перпендикулярное прямой Симсона точки P .

4. Точка Торричелли. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1 , CAB_1 и ABC_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Внеписанная окружность касается продолжения стороны BC за точку C в точке A_1 . Докажите, что точки B_1 , C_1 , A_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда угол C прямой.

6. Прямые AP , BP , CP пересекают стороны BC , CA , AB треугольника ABC соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ вторично пересекает прямые BC , CA , AB в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.

7. Прямая Паскаля. Касательные в вершинах треугольника к его описанной окружности пересекают продолжения сторон в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что данные точки лежат на одной прямой.

8. (а) Через точки M и N вне окружности ω проведены две касательные MP и NQ . Докажите, что точка пересечения L прямых MN и PQ такова, что $\frac{ML}{LN} = \frac{MP}{NQ}$.

(б) Докажите, что во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ точки пересечения противоположных сторон AB и CD , BC и AD , а также точки пересечения касательных в противоположных вершинах A и C , B и D , лежат на одной прямой.

9. Теорема о трёх колпаках. На плоскости даны три непересекающиеся окружности попарно различных радиусов. К каждому двум окружностям проведены две общие внешние касательные, и отмечена точка их пересечения. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.

10. (а) Теорема Паскаля. Докажите, что во вписанном в окружность шестиугольнике $ABCDEF$ точки пересечения противоположных сторон AB и DE , BC и EF , CD и AF лежат на одной прямой.

(б) Докажите, что диагонали данного шестиугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.